Questions de cours

- Règle de Sarrus pour une matrice 3 x 3…

$$\text{Si } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{33}a_{12} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

- df et théorème de Schwarz $f(x,y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ => pas d'ordre dans les dérivées

f ne dépend pas du chemin suivi (méca) forces conservatives ou fct d'états (thermo)

Repères et vecteurs coplanaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc leurs coordonnées sont proportionnelles.

Avec les abscisses et ordonnées : $2 \times (-2) - a = 0$ d'où $\boxed{a = -4}$

Avec les abscisses et côtés : $2b - 5 = 0$ d'où $\boxed{b = \frac{5}{2}}$

Nbres complexes

(c) Pour obtenir la forme cartésienne on écrit $(1+j\sqrt{2})^3 = 1+3j\sqrt{2}+3(j\sqrt{2})^2+(j\sqrt{2})^3 = 1-6+(3-2)j\sqrt{2} = -5+j\sqrt{2}$. Le module est donc $\sqrt{25+2} = \sqrt{27}$, et l'argument $\arccos(\frac{-5}{\sqrt{27}})$.

(d) $\frac{1+j}{2-j} = \frac{(1+j)(2+j)}{5} = \frac{1+3j}{5}$. Le module est $\sqrt{10}/5$ et l'argument $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$.

On a $f(x) = \dfrac{1+j\tan x.}{1-j\tan x} = \dfrac{(1+j\tan x)^2}{1+\tan^2 x} = \dfrac{1-\tan^2 x + 2j\tan x}{1+\tan^2 x}$, donc la partie réelle de $f(x)$ est $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ et la partie imaginaire $\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

Mais d'autre part, en multipliant numérateur et dénominateur de $f(x)$ par $\cos x$, on constate que $f(x) = \dfrac{\cos x + j\sin x}{\cos x - j\sin x} = \dfrac{\exp(jx)}{\exp(-jx)} = \exp(2jx)$: le module est 1, l'argument est $2x$.

Et enfin, en identifiant les parties réelles et imaginaires avec ces deux méthodes de calcul de $f(x)$ on obtient les relations $\cos(2x) = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ et $\sin(2x) = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

On a

$$\begin{aligned}\sin 5\theta &= \mathrm{Im}[(\cos\theta + j\sin\theta)^5] \\ &= 5\sin\theta\cos^4\theta - 10\sin^3\theta\cos^2\theta + \sin^5\theta \\ &= 5\sin\theta(1-\sin^2\theta)^2 - 10\sin^3\theta(1-\sin^2\theta) + \sin^5\theta \\ \sin 5\theta &= 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta\end{aligned}$$

Fonctions à plusieurs variables

les dérivées d'ordre 1 ont été calculées plus haut. On les redérive (il peut être intéressant d'écrire $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sous la forme $x(x^2+y^2)^{-1/2}$...)

$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = y^2(x^2+y^2)^{-3/2}$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = x^2(x^2+y^2)^{-3/2}$, donc

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = (x^2+y^2)(x^2+y^2)^{-3/2} = (x^2+y^2)^{-1/2} = r^{-1}.$$

Statistique à une variable

1) Pour calculer la moyenne de cette série statistique, on prend en compte le milieu des classes, à savoir :

Intervalle de durée	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[
Milieu des classes	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**
Effectif	14	16	25	15	17	13

La durée moyenne d'un appel vaut donc $\bar{x} = \frac{1\times14+3\times16+......+9\times17+11\times13}{100} = \frac{588}{100} = 5,88$ minutes, soit 5 minutes et $0,88\times60 = 52,8$ secondes. La durée moyenne d'un appel vaut donc 5 minutes, 52 secondes et 8 dixièmes

2) La nouvelle série statistique est donc

Intervalle de durée	[0;4[	[4;8[	[8;12[
Effectif	14+16=30	25+15=40	17+13=30

Pour calculer la moyenne de cette série statistique, on prend en compte le milieu des classes, à savoir

Intervalle de durée	[0;4[	[4;8[	[8;12[
Milieu des classes	**2**	**6**	**10**
Effectif	30	40	30

La durée moyenne d'un appel calculée à partir de cette série vaut donc $\bar{x} = \frac{2\times30+6\times40+10\times30}{100} = \frac{600}{100} = 6$ minutes

3) Selon la manière de regrouper les communications téléphoniques (donc seulement la présentation de la série statistique !), les résultats peuvent être différents